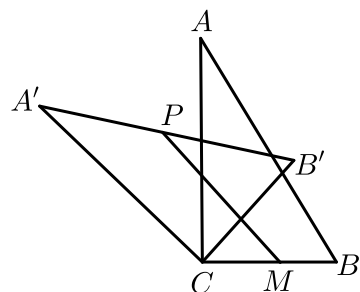


第1讲 旋转中的隐圆问题（加油站）

一、绕某点运动问题

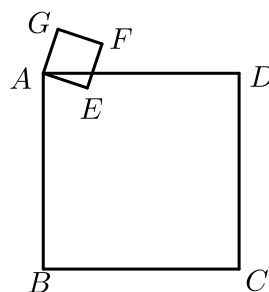
练习1

1. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 逆时针旋转得到 $\triangle A'B'C$ ， M 是 BC 的中点， P 是 $A'B'$ 的中点，连接 PM 。若 $BC = 2$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，则线段 PM 的最大值是（ ）。

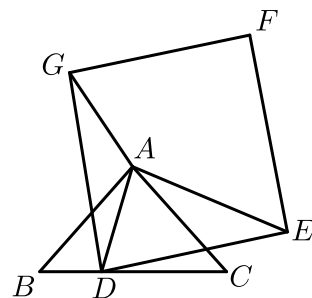


- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4cm ，正方形 $AEFG$ 的边长为 1cm 。如果正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转，那么 C 、 F 两点之间的最小距离是 _____ cm 。

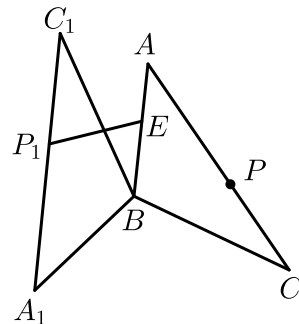


3. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ， D 为 BC 边一点，且 $BD : DC = 1 : 2$ ，以 D 为一个顶点作正方形 $DEFG$ ，且 $DE = BC$ ，连接 AE ，将正方形 $DEFG$ 绕点 D 旋转一周，在整个旋转过程中，当 AE 取得最大值时 AG 的长为 _____。



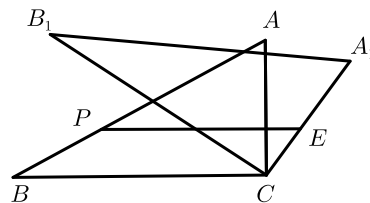
练习2

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A < 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ， E 为 AB 的中点， P 为 AC 边上一动点，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 α 角（ $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ ）得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，点 P 的对应点为 P_1 ，连 EP_1 ，在旋转过程中，线段 EP_1 的长度的最大值是（ ）。



- A. $\sqrt{3} + 1$ B. 8 C. $\frac{13}{2}$ D. 6

5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 8$ ，点 P 是线段 AB 上一动点。将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ 。点 E 是 A_1C 上一点，且 $A_1E = 4$ ，则 PE 长度的最小值与最大值的和为 _____。



6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle ACB = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转, 得到 $\triangle A_1BC_1$.

(1) 如图1, 当点 C_1 在线段 CA 的延长线上时, 求 $\angle CC_1A_1$ 的度数.

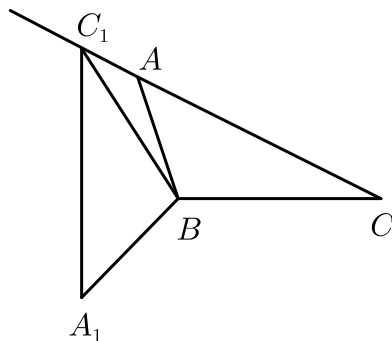


图1

(2) 如图2, 连接 AA_1 , CC_1 . 若 $\triangle CBC_1$ 的面积为3, 求 $\triangle ABA_1$ 的面积.

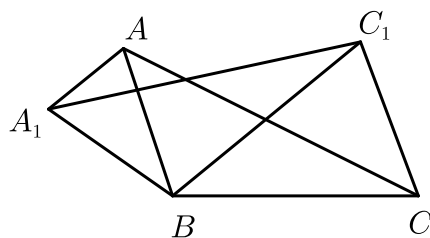


图2

(3) 如图3, 点 E 为线段 AB 中点, 点 P 是线段 AC 上的动点, 在 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转的过程中, 点 P 的对应点是点 P_1 , 直接写出线段 EP_1 长度的最大值与最小值.

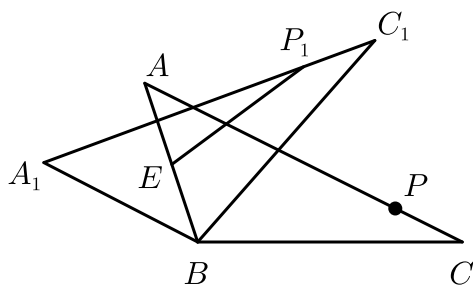
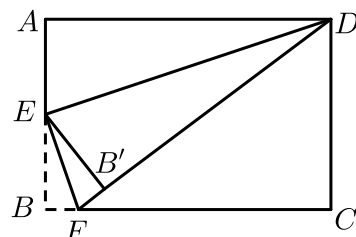


图3

二、到某点定长问题

练习3

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 6$ ， E 是 AB 边的中点， F 是线段 BC 上的动点，将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$ ，连接 $B'D$ ，则 $B'D$ 的最小值是（ ）。

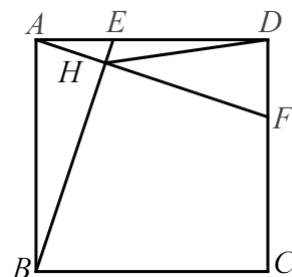


- A. $2\sqrt{10} - 2$ B. 6 C. $2\sqrt{13} - 2$ D. 4

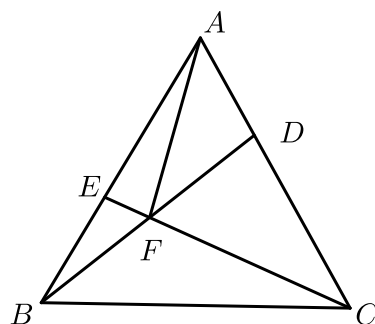
三、定角问题

练习4

8. 如图，正方形 $ABCD$ 的边 AD 、 CD 上两个动点 E 、 F ，且满足 $AF = BE$ ， BE 交 AF 于点 H 。若正方形的边长为4，线段 DH 最小值是 _____。

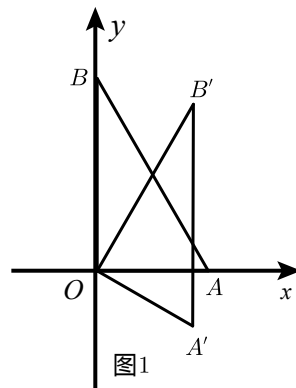


9. 如图，已知在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = BC = 8$ ，点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 上两点，且 $AE = CD$ ， BD 交 CE 于 F ，连接 AF ，则 AF 的最小值为 _____。

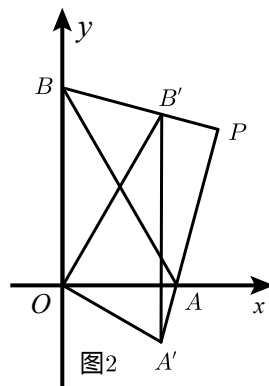


10. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2, 0)$ ，点 $B(0, 2\sqrt{3})$ ，点 $O(0, 0)$ ， $\triangle AOB$ 绕着点 O 顺时针旋转，得到 $\triangle A'OB'$ ，点 A 、 B 旋转后的对应点为 A' 、 B' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图1，若 $\alpha = 30^\circ$ ，求点 B' 的坐标。



(2) 如图2，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，设直线 AA' 和直线 BB' 交于点 P ，求证： $AA' \perp BB'$ 。



(3) 在(2)中的条件下，若 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，点 $C(-2, 0)$ ，求线段 CP 长度的取值范围（直接写出结果即可）。

11. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2, 0)$ ，点 $B(0, 2\sqrt{3})$ ，点 $O(0, 0)$ ． $\triangle ABC$ 绕着 O 顺时针旋转，得 $\triangle A'OB'$ ，点 A 、 B 旋转后的对应点为 A' 、 B' ，记旋转角为 α ．

(1) 如图1，若 $\alpha = 30^\circ$ ，求点 B' 的坐标．

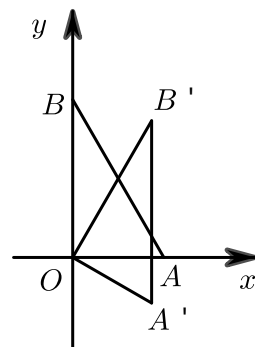


图 1

(2) 如图2，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，设直线 AA' 和直线 BB' 交于点 P ，求 $\angle BPA'$ ．

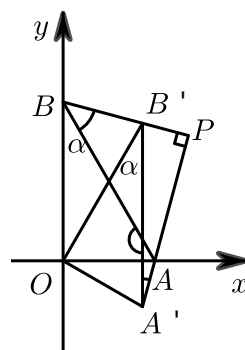


图 2

(3) 若 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，求 (2) 中的点 P 纵坐标的最小值 (直接写出结果即可) ．

四、构造中位线问题

练习5

12. 将等边三角形 ABC 如图放置在平面直角坐标系中， $AB = 8$ ， E 为线段 AO 的中点，将线段 AE 绕点 A 逆时针旋转 60° 得线段 AF ，连接 EF 。

(1) 如图1，求点 E 的坐标。

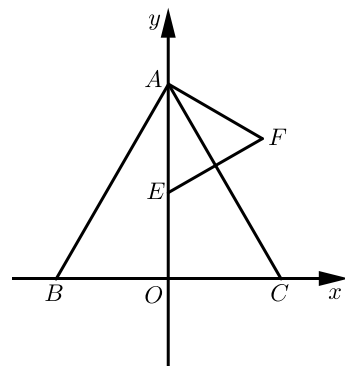


图1

(2) 在图1中， EF 与 AC 交于点 G ，连接 EC ， N 为 EC 的中点，连接 NG ，求线段 NG 的长。请你补全图形，并完成计算。

(3) 如图2，将 $\triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转， M 为线段 EF 的中点， N 为线段 CE 的中点，连接 MN ，请直接写出在旋转过程中 MN 的取值范围。

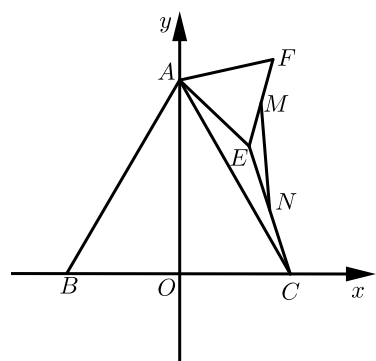


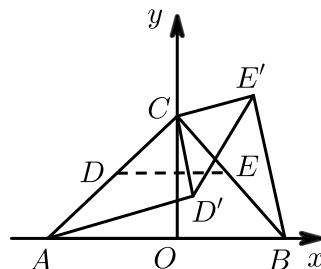
图2

五、切线问题

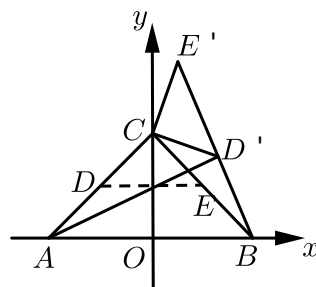
练习6

13. 在平面直角坐标系中，点 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，点 D ，点 E 分别是 AC ， BC 的中点，将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得到 $\triangle CD'E'$ ，及旋转角为 α ，连接 AD' ， BE' 。

(1) 如图，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，当 $AD' \parallel CE'$ 时，求 α 的大小。



(2) 如图， $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ，当点 D' 落在线段 BE' 上时，求 $\sin \angle CBE'$ 的值。



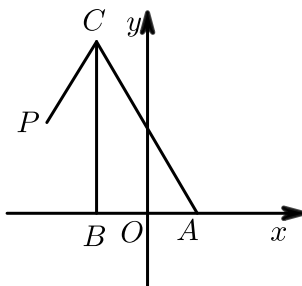
(3) 直线 AD' 与直线 BE' 相交于点 P ，求点 P 的横坐标 m 的取值范围（直接写出结果即可）

六、面积最值问题

练习7

14. 在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ，点 $O(0,0)$ ，点 $A(1,0)$ ，点 $B(-1,0)$ ，点 C 在第二象限，点 $P(-2, \sqrt{3})$ 。

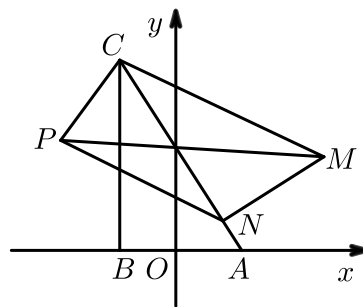
(1) 如图①，求 C 点坐标及 $\angle PCB$ 的大小。



图①

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕 C 点逆时针旋转得到 $\triangle MNC$ ，点 A, B 的对应点分别为点 M, N ， S 为 $\triangle PMN$ 的面积。

① 如图②，当点 N 落在边 CA 上时，求 S 的值；

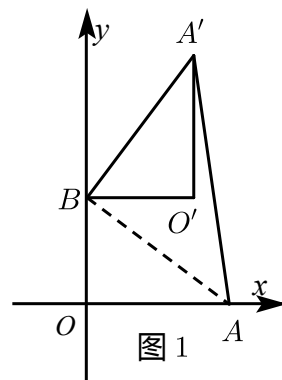


图②

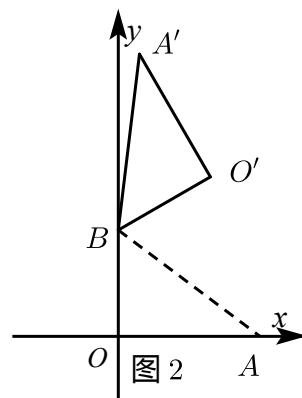
② 求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。

15. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得 $\triangle A'BO'$ ，点 A, O 旋转后的对应点为 A', O' ．记旋转角为 α ．

(1) 如图1，若 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AA' 的长．



(2) 如图2，若 $\alpha = 120^\circ$ ，求点 O' 的坐标．



(3) 记 K 为 AB 的中点， S 为 $\triangle KA'O'$ 的面积，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）．